

Einführung in Fuzzy-Logik

Die klassische Aussagenlogik ist zweiwertig. Alle Aussagen werden auf die Wahrheitswerte wahr und falsch (bzw. 0 und 1) abgebildet. Dieses Vorgehen stößt in vielen Alltagssituationen allerdings an ihre Grenzen, da eine eindeutige Zuordnung nicht immer möglich oder erwünscht ist. Die Fuzzy-Logik trennt sich daher von dieser zweiwertigen Logik und führt eine unedlichwertige Logik ein. Aussagen werden dabei nicht mehr auf die Wahrheitswerte 0 und 1 sondern viel mehr auf das kontinuierliche Intervall zwischen 0 und 1 abgebildet.

1 Fuzzy-Mengen

Fuzzy-Mengen sind »unscharfe« Mengen. Die Zuordnung eines Elementes zu einer Fuzzy-Menge muss nicht eindeutig sein und kann auch nur teilweise erfüllt sein. Eine **Fuzzy-Menge** μ von G ist daher eine Funktion von der Referenzmenge G in das Einheitsintervall, d.h.

$$\mu : G \rightarrow [0, 1]. \quad (1)$$

Die Funktion μ wird auch als **Zugehörigkeitsfunktion** der Fuzzy-Menge bezeichnet, die jedem Element $x \in G$ den Zugehörigkeitsgrad $\mu(x)$ aus dem Intervall $[0, 1]$ zuordnet. Dieses Konzept erlaubt die Modellierung abgestufter Zugehörigkeitsübergänge, die der Intuition oft näher liegen.

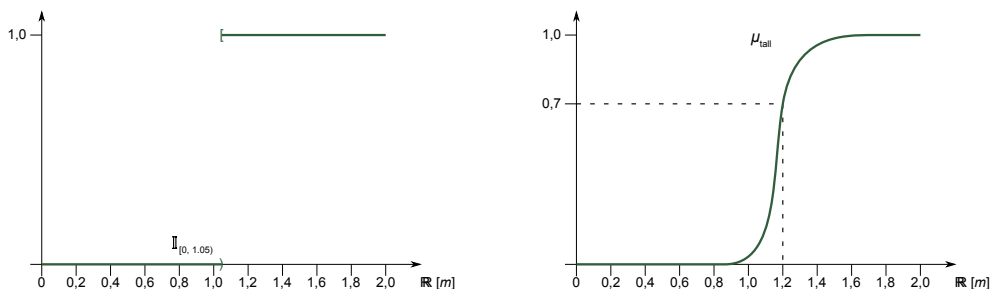


Abbildung 1: »Wann ist ein vierjähriger europäischer Junge groß?« – Links: klassisch, rechts: fuzzy

2 Mengenoperationen

Aus der klassischen Mengenlehre sind Mengenverknüpfungen wie die Vereinigung oder der Schnitt bekannt. Da Fuzzy-Mengen als Generalisierungen klassischer Mengen betrachtet werden, sind diese Operationen daher auf Fuzzy-Mengen ebenso erwünscht. Die Interpretation des Schnittes von Mengen führt in diesem Zusammenhang zu der **t-Norm**, während die Interpretation der Vereinigung von Mengen zu der Definition der **t-Conorm** führt. Beide Definitionen geben einen Rahmen für mögliche Funktionen vor:

t-Norm

t-Conorm

$$(2) \quad \top(a, 1) = a \quad (\text{Einselement}) \quad \perp(a, 0) = a \quad (6)$$

$$(3) \quad a \leq b \Rightarrow \top(a, c) \leq \top(b, c) \quad (\text{Monotonie}) \quad a \leq b \Rightarrow \perp(a, c) \leq \perp(b, c) \quad (7)$$

$$(4) \quad \top(a, b) = \top(b, a) \quad (\text{Kommutativität}) \quad \perp(a, b) = \perp(b, a) \quad (8)$$

$$(5) \quad \top(a, \top(b, c)) = \top(\top(a, b), c) \quad (\text{Assoziativität}) \quad \perp(a, \perp(b, c)) = \perp(\perp(a, b), c) \quad (9)$$

Bekannte Funktionen, die diesen Bedingungen genügen, sind das Minimum als t -Norm und das Maximum als t -Conorm. Neben diesen Mengenverknüpfungen lässt sich durch **Modifikatoren** der Zugehörigkeitsgrad einer Fuzzy-Menge beeinflussen, ohne dabei eine grundsätzliche Veränderung zu verursachen. Diese Modifikatoren eignen sich besonders gut, um linguistischen Termen wie »sehr« oder »mehr oder weniger« zusätzlichen Ausdruck zu verleihen. So lässt sich durch die Konzentration $\text{CON}(\mu(x)) = \mu(x)^2$ eine Verschärfung der Fuzzy-Menge erreichen, während die Dilation $\text{DIL}(\mu(x)) = \sqrt{\mu(x)}$ eine gegebene Menge unschärfer werden lässt.

3 Fuzzy-Logik

Soll Fuzzy-Logik in der Regelungstechnik eingesetzt werden, dann wird schnell deutlich, dass die diskreten Eingabegrößen mit Fuzzy-Regeln verstanden werden müssen, um anschließend wieder diskrete Reaktionen auszuführen. Um diese Probleme zu lösen wird in drei Schritten vorgegangen:

Fuzzyfizierung

Dieser Vorgang bezeichnet die Transformation scharfer Eingangsgrößen in linguistische Variablen. Dazu werden übliche Fuzzy-Mengen verwendet, die den möglichen Eingangsgrößen einen Zugehörigkeitsgrad zuordnen.

Inferenz

Die Inferenz bezeichnet die Auswertung von Regeln aus einer zugrunde liegenden Regelbasis und den Aufbau einer Ergebnismenge. Dazu wird zunächst der Erfüllungsgrad der Prämisse durch die logische Verknüpfung der Zugehörigkeitsgrade der beteiligten Fuzzy-Mengen ermittelt. Anschließend wird dieser Erfüllungsgrad dem Erfüllungsgrad der Ausgangsmenge zugewiesen.

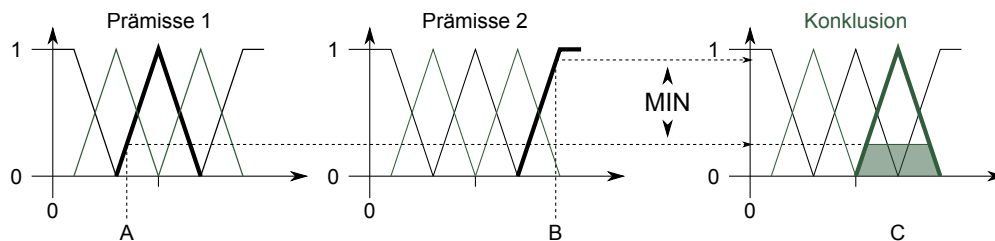


Abbildung 2: Regelanwendung der Form »wenn A und B dann C«

In einem letzten Schritt werden alle durch Regelanwendung entstandenen Zugehörigkeitsfunktionen durch logische Verknüpfungen zusammengefasst.

Defuzzyfizierung

Bei der Defuzzyfizierung wird die Ergebnis-Fuzzy-Menge des Inferenzvorgangs in eine scharfe Ausgangsgröße transformiert. Dazu wird z.B. der Maximalwert der Zugehörigkeitsfunktion ermittelt. Weit verbreitet ist auch die Methode **Centre-of-Gravity (COG)**, bei welcher der Masseschwerpunkt der Menge ermittelt wird.

Quellen

1. Rudolf Kruse, Jörg Gebhardt und Frank Klawonn: **Fuzzy-Systeme**. Braunschweig, 1994
2. Benjamin Bruns, Konrad Gadzicki, Hannes Hünecke, und Mark Klenke: Seminararbeiten zur Veranstaltung *Umgang mit unsicherem Wissen, Teil II: Fuzzy-Logik*. Universität Bremen, 2006
 - Michael Klemm: **Einführung in die Fuzzy-Logik**.
 - Stephan Großewinkelmann: **Grundlagen und Eigenschaften**.
 - Felix Füllgraf: **Inferenz**.
 - Dennis Pachur: **Defuzzifizierung und Einsatz in der Regelungstechnik**.
3. Sven Schlarb: **Unschärfe Validierung strukturierter Daten**. Dissertation, Universität Köln, 2007