Einführung in Fuzzy-Logik

Soft Computing 1
Wintersemester 2009/2010

Fynn Feldpausch Dominik Menke

Universität Bremen, Fachbereich 3

17. November 2009

Überblick

1 Einführung

2 Fuzzy-Mengen

3 Mengenoperationen
- Verknüpfungen
- Modifikatoren

4 Fuzzy-Logik
- Fuzzyfizierung
- Inferenz
- Defuzzyfizierung

5 Fuzzy-Regelungstechnik
- Fuzzy-Controller
- Spektakuläre Live-Show

Einführung

Motivation

- **Problem der klassischen Logik:**
  - Die Welt in der wir leben, lässt sich nicht hinterfragen, wenn man nur »ja« und »nein« als Antwort zulässt.
- **»Ist es warm?«**
  - Beispiel Expertensystem:
    - »Wenn 10 ℃, dann ‚nein'.«
    - »Wenn 30 ℃, dann ‚ja'.«
  - Wo ist die Grenze? 20 ℃? 18,5 ℃? 23 ℃?
- **mehrwertige Logik notwendig:**
  - »Ist es warm?«
    $\longrightarrow$ »Ja, ein bisschen.«

Entstehung

- **Platon**
  - postulierte weiteren Bereich zwischen Begriffen »wahr« und »falsch«
  - wiederspricht seinem Zeitgenossen Aristoteles
- **Jan Łukasiewicz**
  - schließt auf Existenz eines dritten Wahrheitswertes: »possible (1/2)«
  - entwickelt später vier- und fünfwertige Logiken
- **Lotfi A. Zadeh**
  - entwickelt Fuzzy-Logik in heutiger Form
  - Idee einer unendlichwertigen Logik
  - Ziel ist die mathematische Beschreibung eines Systems, dass einer linguistischen Beschreibung eines Menschen ähnelt

Anwendung

- **Wirtschaft & Industrie**
  - Finanzdienstleistungen
  - Regelungs- und Steuerungstechnik
  - Automatisierung
  - Qualitätssicherung
  - ...
- **Wissenschaft & Forschung**
  - Entscheidungstheorie
  - Wirtschaftswissenschaften
  - Mathematik & Naturwissenschaften
  - ...
- **Alltag**
  - Auto
  - U-Bahn
  - Waschmaschine
  - ...

Fuzzy-Mengen

Fuzzy-Mengen

- Fuzzy-Mengen sind »unscharf«
- Zuordnung muss nicht eindeutig sein
- erlaubt die Modellierung abgestufter Übergänge

Definition

Eine **Fuzzy-Menge** μ von G ist eine Funktion von der Referenzmenge G in das Einheitsintervall, d.h.

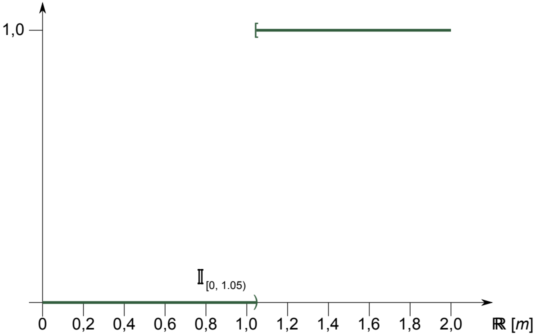
$$\mu : G \to [0, 1].$$

μ wird auch als **Zugehörigkeitsfunktion** der Fuzzy-Menge bezeichnet, die jedem Element $x \in G$ den **Zugehörigkeitsgrad** $\mu(x)$ aus dem Intervall $[0, 1]$ zuordnet.

- Trotz des $[0, 1]$-Intervalls als Ergebnismenge, bitte **Unschärfe** nicht mit **Wahrscheinlichkeit** verwechseln!

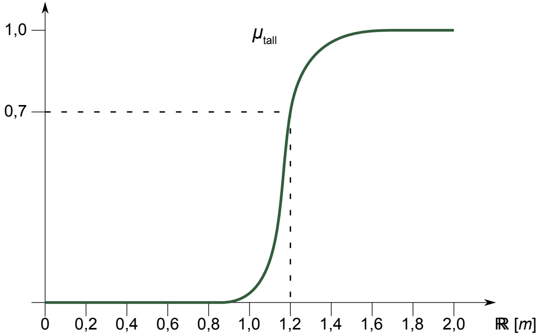
Fuzzy-Mengen

- **Beispiel:** »Wann ist ein vierjähriger europäischer Junge groß?«
- **klassisches Problem:** Klassifikation muss eindeutig sein
- Unstetigkeitsstelle widerspricht Intuition



Fuzzy-Mengen

- **Beispiel:** »Wann ist ein vierjähriger europäischer Junge groß?«
- **Fuzzy Lösung:** Klassifikation muss *nicht* eindeutig sein
- Unstetigkeitsstelle *muss nicht modelliert werden*



Beziehungen zwischen Fuzzy-Mengen

- Die Teilmengen-Eigenschaft der klassischen Mengenlehre

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

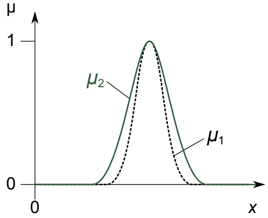
lässt sich auf Fuzzy-Mengen übertragen:

Definition

Ein Fuzzy-Set μ_1 heißt **Fuzzy-Teilmenge** einer Fuzzy-Menge μ_2 auf der Grundmenge G, wenn gilt:

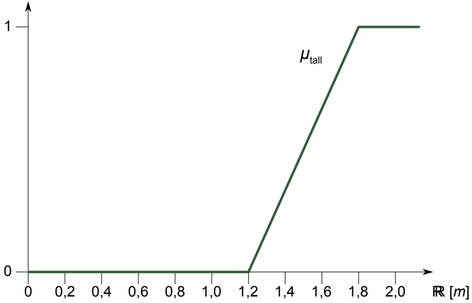
$$\mu_1(x) \leq \mu_2(x) \quad \forall x \in G.$$

Wir schreiben $\mu_1 \subseteq \mu_2$.



Einfache Fuzzy-Mengen

- **Aussage:** Ein Mensch ist *»groß«*.

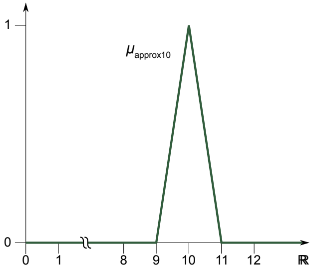


$$\mu_{\text{tall}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 1.2, \\ \frac{5}{3}x - 2 & \text{für } 1.2 > x > 1.8, \\ 1 & \text{für } x \geq 1.8 \end{cases}$$

Einfache Fuzzy-Mengen

- **Aussage:** Eine Zahl ist *»ungefähr gleich 10«*.

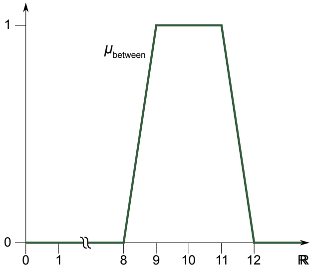
$$\mu_{\text{approx10}}(x) = \begin{cases} x - 9 & \text{für } 9 > x > 10, \\ 1 & \text{für } x = 10, \\ -x + 11 & \text{für } 10 > x > 11, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Einfache Fuzzy-Mengen

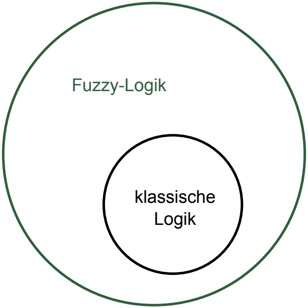
- **Aussage:** Eine Zahl liegt *»ungefähr zwischen 9 und 11«*.

$$\mu_{\text{between}}(x) = \begin{cases} x - 8 & \text{für } 8 > x > 9, \\ 1 & \text{für } 9 \leq x \leq 11, \\ -x + 12 & \text{für } 11 > x > 12, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Verknüpfungen

- **Aus der klassischen Mengenlehre bekannt:**
  - » Vereinigung: $A \cup B$
  - » Schnitt: $A \cap B$
  - » Komplement: A^C
- Fuzzy-Mengen sollen Generalisierungen klassischer Mengen sein
- Operationen auf Fuzzy-Mengen daher ebenso erwünscht



t-Norm

- Interpretation des Schnittes von Mengen

Definition

Eine Funktion $\top : [0,1]^2 \to [0,1]$ heißt **t-Norm**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1)	$\top(a,1) = a$	(Einselement)
(2)	$a \leq b \Rightarrow \top(a,c) \leq \top(b,c)$	(Monotonie)
(3)	$\top(a,b) = \top(b,a)$	(Kommutativität)
(4)	$\top(a,\top(b,c)) = \top(\top(a,b),c)$	(Assoziativität)

t-Norm

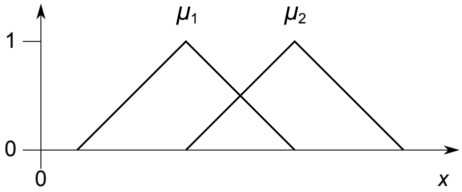
- **Beispiele:**

(1) $$\top_{\text{min}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} min\{\mu_1, \mu_2\}$$

(2) $$\top_{\text{Łuka}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} max\{0, \mu_1 + \mu_2 - 1\}$$

(3) $$\top_{\text{prod}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} \mu_1 \cdot \mu_2$$

- **Kennliniendarstellung für Beispiel (1):**



t-Norm

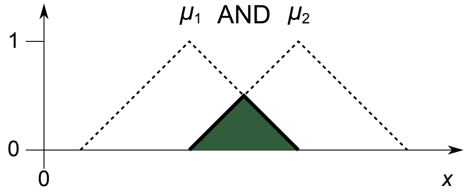
- **Beispiele:**

(1) $$\top_{\text{min}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} min\{\mu_1, \mu_2\}$$

(2) $$\top_{\text{Łuka}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} max\{0, \mu_1 + \mu_2 - 1\}$$

(3) $$\top_{\text{prod}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} \mu_1 \cdot \mu_2$$

- **Kennliniendarstellung für Beispiel (1):**



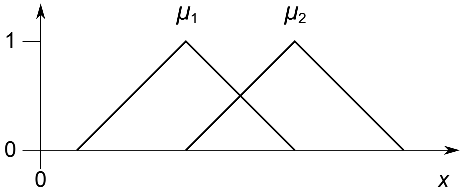
Konjunktion von Fuzzy-Mengen

Definition

Seien μ_1, μ_2 Fuzzy-Mengen auf G. Dann heißt

$$\mu_1 \cap \mu_2 : G \to [0, 1] \quad \text{mit} \quad (\mu_1 \cap \mu_2)(x) := \min(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

Durchschnitt der Fuzzy-Mengen μ_1 und μ_2.



Dies entspricht einer **UND-Verknüpfung**, wir schreiben daher μ_1 UND μ_2.

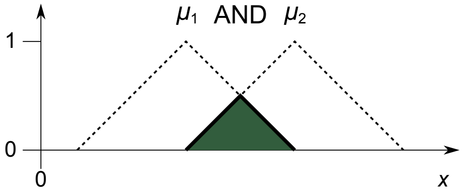
Konjunktion von Fuzzy-Mengen

Definition

Seien μ_1, μ_2 Fuzzy-Mengen auf G. Dann heißt

$$\mu_1 \cap \mu_2 : G \to [0,1] \quad \text{mit} \quad (\mu_1 \cap \mu_2)(x) := \min(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

Durchschnitt der Fuzzy-Mengen μ_1 und μ_2.



Dies entspricht einer **UND-Verknüpfung**, wir schreiben daher μ_1 UND μ_2.

t-Conorm

- Interpretation der Vereinigung von Mengen

Definition

Eine Funktion $\perp : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ heißt **t-Conorm**, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1)	$\perp(a, 0) = a$	(Einselement)
(2)	$a \leq b \Rightarrow \perp(a, c) \leq \perp(b, c)$	(Monotonie)
(3)	$\perp(a, b) = \perp(b, a)$	(Kommutativität)
(4)	$\perp(a, \perp(b, c)) = \perp(\perp(a, b), c)$	(Assoziativität)

t-Conorm

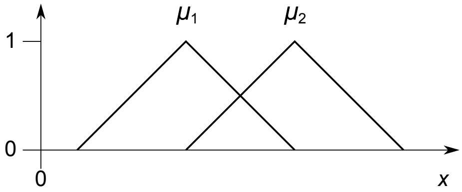
- **Beispiele:**

(1) $$\perp_{\text{max}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} max\{\mu_1, \mu_2\}$$

(2) $$\perp_{\text{Łuka}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} min\{\mu_1 + \mu_2, 1\}$$

(3) $$\perp_{\text{prod}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \cdot \mu_2$$

- **Kennliniendarstellung für Beispiel (1):**



t-Conorm

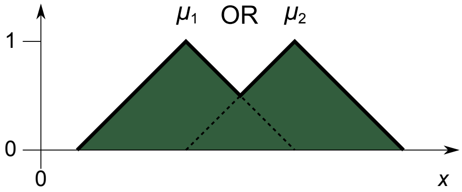
- **Beispiele:**

(1) $$\perp_{\text{max}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} max\{\mu_1, \mu_2\}$$

(2) $$\perp_{\text{Łuka}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} min\{\mu_1 + \mu_2, 1\}$$

(3) $$\perp_{\text{prod}}(\mu_1, \mu_2) \overset{def}{=} \mu_1 + \mu_2 - \mu_1 \cdot \mu_2$$

- **Kennliniendarstellung für Beispiel (1):**



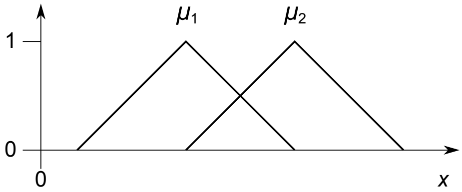
Disjunktion von Fuzzy-Mengen

Definition

Seien μ_1, μ_2 Fuzzy-Mengen auf G. Dann heißt

$$\mu_1 \cup \mu_2 : G \to [0,1] \quad \text{mit} \quad (\mu_1 \cup \mu_2)(x) := \max(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

Vereinigung der Fuzzy-Mengen μ_1 und μ_2.



Dies entspricht einer **ODER-Verknüpfung**, wir schreiben daher μ_1 ODER μ_2.

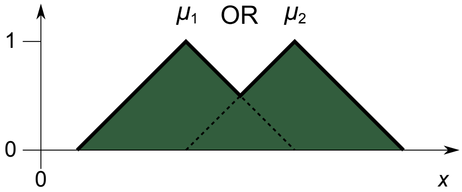
Disjunktion von Fuzzy-Mengen

Definition

Seien μ_1, μ_2 Fuzzy-Mengen auf G. Dann heißt

$$\mu_1 \cup \mu_2 : G \to [0,1] \quad \text{mit} \quad (\mu_1 \cup \mu_2)(x) := \max(\mu_1(x), \mu_2(x))$$

Vereinigung der Fuzzy-Mengen μ_1 und μ_2.



Dies entspricht einer **ODER-Verknüpfung**, wir schreiben daher μ_1 ODER μ_2.

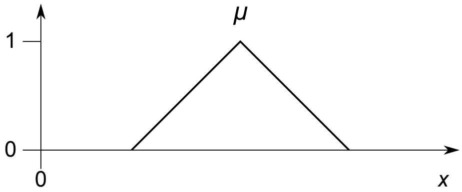
Negation einer Fuzzy-Menge

Definition

Sei μ eine Fuzzy-Menge auf der Grundmenge G. Dann heißt

$$\mu^C : G \to [0,1] \quad \text{mit} \quad \mu^C(x) = 1 - \mu(x)$$

Komplement der Fuzzy-Menge μ.



Dies entspricht einer **NICHT-Verknüpfung**, wir schreiben daher NICHT μ.

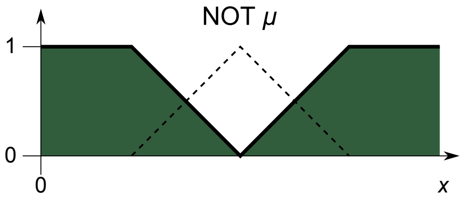
Negation einer Fuzzy-Menge

Definition

Sei μ eine Fuzzy-Menge auf der Grundmenge G. Dann heißt

$$\mu^C : G \to [0, 1] \quad \text{mit} \quad \mu^C(x) = 1 - \mu(x)$$

Komplement der Fuzzy-Menge μ.



Dies entspricht einer **NICHT-Verknüpfung**, wir schreiben daher NICHT μ.

Modifikatoren

- Beeinflussung des Zugehörigkeitsgrades, aber keine grundsätzliche Veränderung
- **Konzentration:**

$$CON(\mu(x)) = \mu(x)^2$$

  - Fuzzy-Menge wird schärfer
  - eignet sich für linguistischen Term »sehr«, »viel«, ...
- **Diletation:**

$$DIL(\mu(x)) = \sqrt{\mu(x)}$$

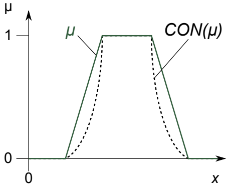
  - Fuzzy-Menge wird unschärfer
  - geeignet für Terme wie »mehr oder weniger«
- **Kontrastintensivierung:**

$$INT(\mu(x)) = \begin{cases} 2\mu(x)^2 & \text{für } \mu(x) < 0.5 \\ 1 - 2(1 - \mu(x))^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

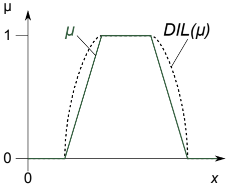
  - oberer Bereich der Fuzzy-Menge wird unschärfer
  - unterer Bereich wird schärfer

Modifikatoren

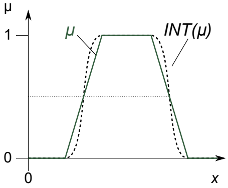
Beispiele



Konzentration



Diletation

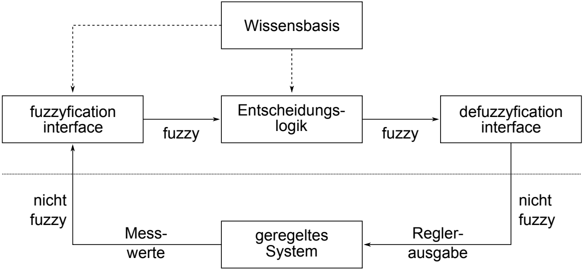


Kontrastintensivierung

Fuzzy-Logik

Fuzzy-Logik

- **Ziel:**
  - diskrete Eingangsgrößen mit Fuzzy-Regeln verstehen
  - diskrete Reaktionen ausführen
- **Ansätze zur Spezifikation:**
  - Ansatz von Mamdani
    - Vorschlag eines Modells mit drei Komponenten



  - Ansatz von Takagi und Sugeno
    - Modifikation des Ansatzes von Mamdani (wird im Folgenden nicht betrachtet)

Fuzzyfizierung

- Transformation scharfer Eingangsgrößen in »linguistische Variablen«
- nützlich ist hierbei das Konzept der ***L*-Fuzzy-Menge**:

Definition

Sei $(L, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband mit l_{min} dem kleinsten und l_{max} dem größten Element. Eine ***L*-Fuzzy-Menge** η von G ist eine Abbildung der Grundmenge G in die Menge L, d.h.

$$\eta : G \to L.$$

- die Sherman-Kent-Skala beispielsweise definiert 5 Abstufungen für L:

$$\begin{aligned} l_{\text{min}} &= \text{unmöglich} < \text{höchst zweifelhaft} < \text{wahrscheinlich nicht} < \text{etwa 50:50} \\ &< \text{wahrscheinlich} < \text{fast sicher} < \text{sicher} = \quad l_{\text{max}} \end{aligned}$$

Fuzzyfizierung

- Transformation scharfer Eingangsgrößen in »linguistische Variablen«
- nützlich ist hierbei das Konzept der ***L*-Fuzzy-Menge**:

Definition

Sei $(L, \sqcap, \sqcup)$ ein Verband mit l_{min} dem kleinsten und l_{max} dem größten Element. Eine ***L*-Fuzzy-Menge** η von G ist eine Abbildung der Grundmenge G in die Menge L, d.h.

$$\eta : G \to L.$$

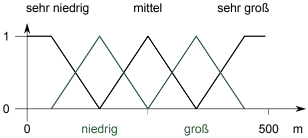
- die Sherman-Kent-Skala beispielsweise definiert 19 Abstufungen für L:

$$\begin{aligned} l_{\text{min}} &= \text{unmöglich} < \text{höchst zweifelhaft} < \text{geringe Chance} < \text{wir glauben nicht} \\ &< \text{unwahrscheinlich} < \text{wahrscheinlich nicht} < \text{weniger als 50:50} < \text{etwa 50:50} \\ &< \text{besser als 50:50} < \text{es ist möglich} < \text{Chancen stehen gut} < \text{wir schätzen schon} \\ &< \text{wir glauben} < \text{wahrscheinlich} < \text{höchstwahrscheinlich} < \text{wir sind sicher} \\ &< \text{wir sind überzeugt} < \text{fast sicher} < \text{sicher} = \quad l_{\text{max}} \end{aligned}$$

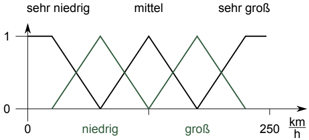
Fuzzyfizierung

Beispiel

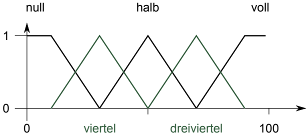
- Automatisches Bremssystem mit folgenden Größen:
  - Abstand d zum Hindernis in Metern mit $d \in [0, 500]$
  - Geschwindigkeit v in $^{km}/_{h}$ mit $v \in [0, 250]$
  - Bremskraft b in Prozent mit $b \in [0, 100]$
- Anwendung der linguistischen Variablen (Partitionierung)



Abstand



Geschwindigkeit



Bremskraft

Inferenz

- Auswertung von Regeln und Aufbau einer Ergebnismenge

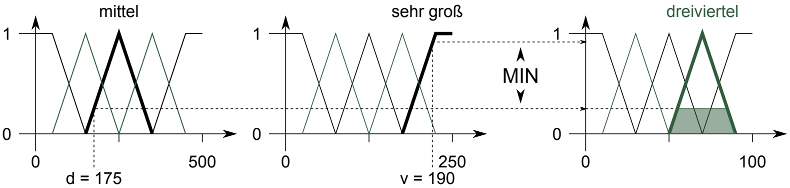
- **Inferenz-Ablauf:**
  - **Aggregation:** Bestimmung des Erfüllungsgrades der Prämisse (Logische Verknüpfung des Zugehörigkeitsgrades der einzelnen Terme/Mengen)
  - **Aktivierung:** Zuweisung des Erfüllungsgrades der Prämisse an den Erfüllungsgrad der Ausgangsmenge.
  - **Akkumulation:** Zusammenfassung aller Zugehörigkeitsfunktionen

- **Inferenz-Methoden:**
  - **Max/Min**
  - Max/Average
  - Max/Prod
  - Min/Max

Inferenz

Beispiel

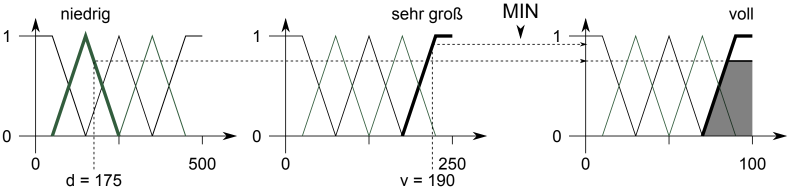
- **Regelbasis:**
  1. R_1: **wenn** d=mittel **und** v=sehr groß **dann** b=dreiviertel
  2. R_2: **wenn** d=niedrig **und** v=sehr groß **dann** b=voll
- **erfasste Werte:**
  - $d = 175\ m$
  - $v = 190\ {}^{km}/_{h}$
- **Anwendung von Regel R_1:**



Inferenz

Beispiel

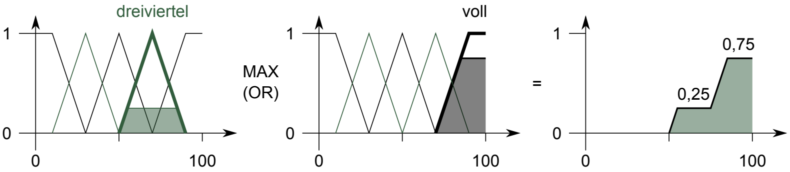
- **Regelbasis:**
  1. R_1: **wenn** d=mittel **und** v=sehr groß **dann** b=dreiviertel
  2. R_2: **wenn** d=niedrig **und** v=sehr groß **dann** b=voll
- **erfasste Werte:**
  - » $d = 175\ m$
  - » $v = 190\ {}^{km}/_{h}$
- **Anwendung von Regel R_2:**



Inferenz

Beispiel

- **Regelbasis:**
  1. R_1: **wenn** d=mittel **und** v=sehr groß **dann** b=dreiviertel
  2. R_2: **wenn** d=niedrig **und** v=sehr groß **dann** b=voll
- **erfasste Werte:**
  » $d = 175\,m$
  » $v = 190\,{}^{km}/_{h}$
- **Akkumulation der Ergebnisse:**



Defuzzyfizierung

- Ergebnis des Inferenzvorgangs: Fuzzy-Menge
- Ergebnis-Fuzzy-Menge für Regelungstechnik wertlos
- Transformation der Ergebnis-Fuzzy-Menge in scharfe Ausgangsgröße

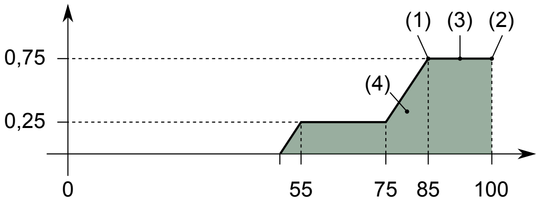
- verschiedene Tranformationsstrategien denkbar:
  - MaxLeft
  - MaxRight
  - Mean-of-Maxima (MOM)
  - Centre-of-Gravity (COG)
  - . . .

- beste Strategie ist von der Anwendung abhängig

Defuzzyfizierung

Beispiel

- **Ergebnis des Inferenzvorgangs:**



- **Ergebnis der Defuzzyfizierung:**

1. MaxLeft: $b = 85$
2. MaxRight: $b = 100$
3. Mean-of-Maxima (MOM): $b = 92.5$
4. Centre-of-Gravity (COG): $b = 77.5$

Fuzzy-Regelungstechnik

Fuzzy-Controller

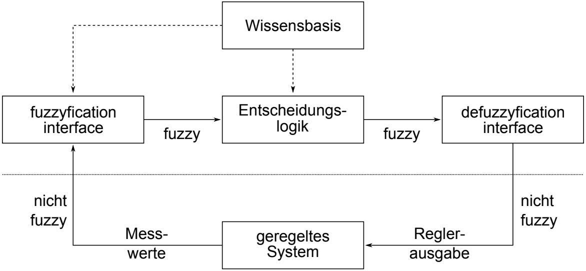
Entwurf

- **Ablauf beim Entwurf eines Fuzzy-Controllers:**
  1. Wahl der Messgrößen für Ein- und Ausgabe des Fuzzy-Controllers
  2. Festlegung der möglichen Wertebereiche für die Ein- und Ausgangsgrößen (Skalierung der linguistischen Variablen)
  3. Definition der linguistischen Terme und ihrer Zugehörigkeitsfunktionen für sämtliche linguistische Variablen
  4. Aufstellen der Regelbasis
  5. Simulation des zugehörigen Regelkreises (sofern möglich)
  6. Einsatz des Fuzzy-Controllers

Fuzzy-Controller

Schema

- **Schematische Darstellung eines Fuzzy-Controllers:**



RockOn Fuzzy

Spektakuläre Live-Show

- grafisches Werkzeug zur Modellierung und Analyse eines Fuzzy-Regelsystems
- bringt Simulationswerkzeug mit
  - » **Pendel**
  - » inverses Pendel
- `http://www.timtomtam.de/rockonfuzzy/`

Literatur

1. Rudolf Kruse, Jörg Gebhardt und Frank Klawonn: **Fuzzy-Systeme**. Braunschweig, 1994
2. Benjamin Bruns, Konrad Gadzicki, Hannes Hünecke, und Mark Klenke: Seminarausarbeitungen zur Veranstaltung *Umgang mit unsicherem Wissen, Teil II: Fuzzy-Logik*. Universität Bremen, 2006
   - Michael Klemm: **Einführung in die Fuzzy-Logik**.
   - Stephan Großewinkelmann: **Grundlagen und Eigenschaften**.
   - Felix Füllgraf: **Inferenz**.
   - Dennis Pachur: **Defuzzifizierung und Einsatz in der Regelungstechnik**.
3. Sven Schlarb: **Unscharfe Validierung strukturierter Daten**. Dissertation, Universität Köln, 2007