Dominik Elsbroek *Fynn Feldpausch*

Dempster-Shafer-Theorie

Die *Dempster-Shafer Theory of Evidence* wurde in den 60er und 70er Jahren von Arthur P. Dempster und Glenn Shafer entwickelt und veröffentlicht. Sie versucht Schwachstellen der weit verbreiteten Bayes'schen Wahrscheinlichkeitstheorie zu beheben. So ermöglicht die Theorie z.B. die explizite Spezifikation von Unwissen sowie die Zusammenfassung von Informationen unterschiedlicher Quellen zu einer Gesamtaussage, wobei die Glaubwürdigkeit dieser Quellen in der Berechnung berücksichtigt wird.

1 Betrachtungsrahmen & Mengentheorie

Im Rahmen der Dempster-Shafer-Theorie gilt Θ als der Betrachtungsrahmen (*frame of discernment*) einer gegebenen Situation. Dieser stellt eine vollständige Menge sich gegenseitig ausschließender Elemente dar, welche als Aussagen oder Hypothesen der jeweiligen Situation interpretiert werden können. Wie in der Mengenlehre üblich ergibt sich die Potenzmenge 2^Θ des Betrachtungsrahmens als die Menge aller seiner Teilmengen.

> ***Beispiel***
> Die Polizei hat drei Männer festgenommen. Die drei Hypothesen A_1, A_2, A_3 bezeichnen jeweils einen der Männer als Täter eines Verbrechens. Dann gilt $\Theta = \{A_1, A_2, A_3\}$ und $2^\Theta = \{\emptyset, \{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_2, A_3\}, \Theta\}$

Die Korrespondenz zwischen Hypothesen und Mengen erlaubt dabei eine Verknüpfung zwischen logischen und mengentheoretischen Operatoren. So lässt sich die Konjunktion $(A \wedge B)$ als mengentheoretischer Schnitt $(A \cap B)$ oder die Disjunktion $(A \vee B)$ als die mengentheoretische Vereinigung $(A \cup B)$ deuten. Auf diese Weise ergeben sich ganze Aussageklassen, welche durch die Vereinigung verschiedener Grundhypothesen entstehen.

2 Glaubensfunktion & Kombinationsregel

Eine Glaubensfunktion (*mass function*) $m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ ordnet einer Aussage oder einer ganzen Menge von Aussagen einen Wert zu, der die Unterstützung dieser Hypothese darstellt. Der Wert kann dabei eine ganz unterschiedliche Herkunft besitzen, z.B. aus Beobachtungen, Expertenbefragungen oder statistischen Erhebungen. Die verbleibende Unsicherheit[1] wird der Gesamtmenge Θ zugeordnet.

> ***Beispiel***
> Eine Befragung ergibt: $m(A_1) = 0.3$ und $m(A_2) = 0,4$. Dann gilt nicht $m(A_3) = 0,3$, sondern $m(\Theta) = 0,3$. Der dritte Verdächtige ist also nicht mit einer Sicherheit von $0,3$ der Täter. Viel mehr hätte es mit dieser Sicherheit jeder der dreien sein können.

Dabei muss die Glaubensfunktion stets folgenden Bedingungen genügen:

1. $m(\emptyset) = 0$
2. $\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$

[1] Es gilt offensichtlich $m(\Theta) = 1 - \sum_{A \subset \Theta} m(A)$

Unterschiedliche Werte einer Glaubensfunktion lassen sich durch Dempsters Kombinationsregel (*dempster's rule of combination*) verknüpfen. Verschiedene Einschätzungen lassen sich so miteinander verrechnen. Dieser Vorgang passiert in drei Schritten:

1. **Kombination:** Berechnung neuer Werte $m'(A)$.

$$m'(A) = \sum_{B_i \cap C_j = A} m_1(B_i) \cdot m_2(C_j)$$

2. **Zusammenfassung:** Summierung von Werten $m'(A)$ gleicher Mengen.

3. **Normalisierung:** Zuordnung $m(\emptyset) = 0$ und Anteilsverteilung auf übrige Werte $m(A)$.

$$m(A) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } A = \emptyset \\ \frac{1}{1-m'(\emptyset)} \cdot m'(A), & \text{wenn } A \neq \emptyset \end{cases}$$

3 Vertrauensfunktion & Plausibilität

Die *gesamte* Unterstützung für eine Aussagenmenge lässt sich durch eine Vertrauensfunktion (*belief function*) $Bel : 2^\Theta \to [0,1]$ messen. Auch an sie sind verschiedene Bedingungen geknüpft:

1. $Bel(\emptyset) = 0$
2. $Bel(\Theta) = 1$
3. Für jede natürliche Zahl n und jede Sammlung $A_1, \ldots, A_n$ von Untermengen von Θ,

$$Bel(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \geq \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)$$

Üblicherweise ergibt sich die Vertrauensfunktion $Bel(A)$ als Summe der Glaubensfunktionen $m(B_i)$ aller ihrer Teilmengen ($B_i \subseteq A$). Es ist allerdings auch eine Vertrauensfunktion denkbar, die nur der Gesamtmenge Θ den Wert 1 und allen anderen Mengen den Wert 0 zuweist. Sie drückt eine totale Unsicherheit aus und wird daher oft als ausdruckslose Vertrauensfunktion (*vacuous belief function*) bezeichnet.

Da die aus der Bayes'schen Wahrscheinlichkeitstheorie übliche Beziehung $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ nicht gültig ist, lässt sich der Standpunkt zu einer Hypothese durch den Wert $Bel(A)$ nicht mehr vollständig wiedergeben. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, einen Blick auf den Zweifel an einer Aussage (*degree of doubt*) $Dou(A) = Bel(\overline{A})$ bzw. das maximal mögliche Vertrauen (*upper probability*) $P^*(A) = 1 - Dou(A)$ in diese Aussage zu werfen (Abbildung 1).

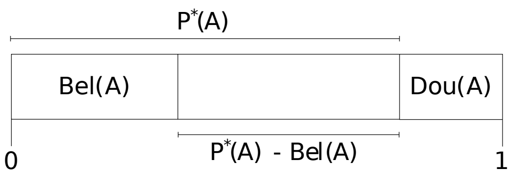

Abbildung 1: Unsicherheit des Systems

Da $Bel(A)$ das minimale Vertrauen in eine Aussage angibt, während $P^*(A)$ ein maximales Vertrauensmaß widerspiegelt, bezeichnet man die Intervallbreite $P^*(A) - Bel(A)$ oft als die Unsicherheit des Systems[2]. Eine Intervallbreite von 1 kennzeichnet dabei die völlige Unwissenheit.

[2]Es gilt $0 \leq Bel(A) \leq P^*(A) \leq 1$ und damit stets $0 \leq P^*(A) - Bel(A)$